

ΘΕΜΑ Α

- A1. Έστω f μια συνάρτηση παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα (α, β) , με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0 , στο οποίο όμως η f είναι συνεχής. Αν $f'(x) > 0$ στο (α, x_0) και $f'(x) < 0$ στο (x_0, β) , να αποδείξετε ότι το $f(x_0)$ είναι τοπικό μέγιστο της f .

μονάδες 7

- A2. Να διατυπώσετε το θεώρημα μέσης τιμής του διαφορικού λογισμού και να το ερμηνεύσετε γεωμετρικά.

μονάδες 4

- A3. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

« Αν η συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} και ισχύει ότι $f''(x_0) = 0$, τότε το σημείο $A(x_0, f(x_0))$ είναι σημείο καμπής της f ».

α. Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα Α, αν είναι αληθής, ή το γράμμα Ψ, αν είναι ψευδής. μονάδα 1

β. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α. μονάδες 3

- A4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

1. Αν συνάρτηση f είναι συνεχής στο $A = [0, 1]$, με σύνολο τιμών το $f(A) = [-1, 2]$ και $f(0) = f(1) = 0$, τότε η f έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο διάστημα $(0, 1)$.

2. Αν συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} και δεν έχει τοπικό ακρότατο τότε $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

3. Αν οι συναρτήσεις f και g έχουν πεδίο ορισμού το $[0, 1]$ και σύνολο τιμών το $[2, 3]$, τότε ορίζεται η $f \circ g$ με πεδίο ορισμού το $[0, 1]$ και σύνολο τιμών το $[2, 3]$.

4. Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$ τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = +\infty$.

5. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ και υπάρχει $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = 0$, τότε κατ' ανάγκη θα ισχύει $f(\alpha) \cdot f(\beta) < 0$.

μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{\ln x}{x}$, $x > 0$

- B1. Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η f είναι γνησίως αύξουσα, τα διαστήματα στα οποία είναι γνησίως φθίνουσα και τα ακρότατα της f .

μονάδες 5

- B2. Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η f είναι κυρτή, τα διαστήματα στα οποία η f είναι κοίλη και να προσδιορίσετε τα σημεία καμπής της γραφικής της παράστασης.

μονάδες 5

- B3. Να βρεθούν οι ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f .

μονάδες 5

- B4. Με βάση τις απαντήσεις σας στα ερωτήματα B1, B2, B3 να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f . (Η γραφική παράσταση α σχεδιαστεί με στυλό).

μονάδες 5

B5. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης C_f της f η οποία διέρχεται από την αρχή των αξόνων . μονάδες 5

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 + \frac{1}{x^2}$, με $x \in (0, +\infty)$.

Γ1. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και να βρείτε το σύνολο τιμών της. μονάδες 6

Γ2. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης g , όπου $g(x) = \sqrt{f(x) - 2}$. μονάδες 5

Γ3. Να λύσετε την εξίσωση $f\left(f(x) - \frac{3}{2}\right) = 2$, $x \in (0, +\infty)$. μονάδες 7

Γ4. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right)$ τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $(\xi, f(\xi))$ να διέρχεται από το σημείο $M\left(0, \frac{5}{2}\right)$. μονάδες 7

ΘΕΜΑ Δ

Έστω παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν :

- $f(x) \cdot \sigma\upsilon\nu^3 x + f'(x) \cdot \sigma\upsilon\nu^2 x \cdot \eta\mu x - 1 = 0$, για κάθε $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$
- $f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{6 + 2\sqrt{3}}{3}$

Δ1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = f(x) \cdot \eta\mu x - \epsilon\phi x$, $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ είναι σταθερή.

Στη συνέχεια να αποδείξετε ότι $f(x) = \frac{1}{\eta\mu x} + \frac{1}{\sigma\upsilon\nu x}$, $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

μονάδες 6

Δ2. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f παρουσιάζει μοναδικό ολικό ελάχιστο στο $x_0 = \frac{\pi}{4}$ το οποίο και να βρείτε . μονάδες 6

Δ3. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 3\sqrt{2}$ στο διάστημα $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ έχει ακριβώς δύο ρίζες ρ_1, ρ_2 με $\rho_1 < \rho_2$. μονάδες 6

Δ4. Να αποδείξετε ότι $f'(\rho_2)(4\rho_2 - \pi) > 4\sqrt{2}$, όπου ρ_2 η ρίζα του ερωτήματος Δ3 . μονάδες 7